

考虑参数关联的缘板阻尼器减振性能分析

李琳^{1,2}, 高钱^{1,2}, 吴亚光^{1,2}, 范雨^{1,2}

(1.北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;

2.北京航空航天大学 航空发动机结构强度北京市重点实验室, 北京 100191)

摘 要: 建立了缘板阻尼器(UPDs)各参数间的关联关系,揭示了减振性能随主要参数的变化规律,形成参数联动设计准则。基于双叶片-缘板阻尼器集中参数模型,采用多谐波平衡法(MHBM)计算稳态响应以衡量阻尼器性能;推了解析雅可比矩阵,使收敛性和计算效率显著提高。结果表明:考虑参数的关联性是必要的;选取较大材料密度与特定底角的对称楔形缘板阻尼器,可以实现4.57%的最优阻尼比;当激振力存在相位差时,采用非对称的楔形阻尼结构能进一步提升阻尼效果。

关键词: 缘板阻尼器;干摩擦阻尼;参数关联设计;多谐波平衡法;雅可比矩阵

中图分类号: V231.92

文献标志码: A

On the vibration reduction performance of underplatform dampers considering parameter correlation

LI Lin^{1,2}, GAO Qian^{1,2}, WU Yaguang^{1,2}, FAN Yu^{1,2}

(1. School of Energy and Power Engineering,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;

2. Beijing Key Laboratory of Aero-engine Structure and Strength,

Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The correlation between principal parameters of wedge underplatform dampers (UPDs) was established to reveal the influence of these relevant parameters on the damping effect, and then to summarize the design guidelines considering parameter correlation. Based on the lumped parameter model of a two blades-UPD system which can describe the motion containing phase lag between blades, the steady state response of the system was simulated by the multi-harmonic balance method (MHBM), and the reduction of the resonance amplitude was used to quantify the damping performance. In order to improve the convergence and efficiency of the algorithm, the Jacobian matrix was deduced analytically. Results showed that it was necessary to consider the parameter correlation. The damper performance of wedge UPDs can be optimized to 4.57% by choosing larger material density and appropriate wedge angles. Asymmetric wedge dampers can further improve the damping effect under excitation with phase lag.

Key words: underplatform damper; dry friction damping; parameter correlation design; multi-harmonic balance method; Jacobian matrix

收稿日期:2020-09-04

作者简介:李琳(1956—),女,教授、博士生导师,博士,主要从事航空发动机结构振动分析及抑制等研究。

通信作者:吴亚光(1990—),男,博士后,主要从事非线性与智能结构动力学研究。E-mail:yaguangwu@buaa.edu.cn

引用格式:李琳,高钱,吴亚光,等.考虑参数关联的缘板阻尼器减振性能分析[J].航空动力学报,2021,36(8):1657-1668. LI Lin, GAO Qian, WU Yaguang, et al. On the vibration reduction performance of underplatform dampers considering parameter correlation[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(8):1657-1668.

由于叶盘结构具有较高的模态密度以及所受的气动载荷具有较宽的频率范围,在设计阶段难以通过调频的方式避开全部共振点。这导致叶片的共振难以避免,极易引发高周疲劳断裂^[1]。因此,需要采用附加阻尼结构对振动进行抑制。缘板阻尼器通过与叶根缘板接触面的相对运动摩擦耗散能量,达到减振的效果,是一种航空发动机中常用的干摩擦阻尼结构^[2],其结构简单、可靠性高且对温度不敏感。

对于缘板阻尼器的优化设计,关键是准确的动力学建模与高效的求解方法。动力学模型的关键在于对非线性摩擦接触的描述与缘板阻尼器-叶片系统的建模。在接触模型中,微滑移模型^[3-4]提出了弹性剪切层的概念,考虑了接触面间局部滑移,但计算较为复杂;而以一点代表整个接触面动力学特性的宏观滑移模型,因表达式简单清晰、计算便捷而广泛使用^[5-9]。其中,迟滞库伦模型^[6,10]由最初的一维常正压力^[10]发展到考虑二维时变正压力模型^[9],不断接近真实情况。在结构模型上,最初的集中参数叶片-缘板阻尼器模型^[5]描述了单自由度滑块-弹簧系统在不同正压力下对地摩擦的运动情况;而实际中,缘板阻尼器至少有两个界面与相邻叶片接触,双叶片-缘板阻尼器多体模型^[11-12]将阻尼器视为刚体,考虑了它在两正交方向上的运动以及两侧摩擦的作用。由于受两侧复杂接触力的影响,缘板阻尼器还会产生滚转运动^[7],导致阻尼效果的弱化。有限元模型^[8-9,13]适用于对减振效果的定量分析,能够考虑阻尼器的不同几何形状、形变等因素的影响^[8,14]。采用有限元模型可以精确定量描述缘板阻尼器的动力学特性^[8],但是由于非线性自由度多、计算量大,进行参数分析时会消耗大量的计算资源。

在干摩擦非线性的求解方法上,常采用时间积分法^[7,15]与谐波平衡法^[16-19]。在早期对双叶片-缘板阻尼器模型的研究,Gola等^[7]采用时间积分法通过求解摩擦力与迟滞回线来判断系统的减振效果与阻尼器的运动情况。在这一过程中,摩擦状态的判断是关键^[12]。对于小阻尼系统,采用时间积分法直接求解稳态响应往往需要消耗大量的时间。谐波平衡法通过将时域微分方程转移到频域中,通过迭代的方式直接求解叶片的稳态响应。随着模型的复杂化,多种减缩方法^[17-18]提高了算法的效率,Petrov等^[9]验证了优化后的谐波平衡法对缘板阻尼器动力学模型有较好的适用性。此外,

采用解析形式的雅可比矩阵^[18]可以显著提高非线性迭代求解的计算效率,是分析含较多非线性接触点的大型有限元模型的必要条件^[13-14]。Siewert等^[6]中给出了单个摩擦对的解析雅可比矩阵推导方法,但是缘板阻尼器上存在两个摩擦对时,原先的解析推导不再适用。

在设计参数的优化上,关键在于找到各个参数对减振效果的影响规律。普遍考虑缘板阻尼器的质量^[8,20-21]、几何形状^[8,13,22]、接触界面参数^[9,19,23]、滚转运动^[19,24-25]、激振力^[19,25]等因素带来的影响。然而现有文献在进行参数分析时,普遍考虑单个参数变化带来的影响。但在实际情况下,缘板阻尼器的设计参数不是独立变化的,而是相互关联的,往往一个参数的改变会引起其他多个参数的改变。例如文献^[25]中并未考虑参数间的相互影响,在参数分析后得出了缘板阻尼器的减振效果将随两侧底角的减小而单调递增的结论。但是,当楔形底角由 60° 变化到 10° 时,由于体积的减小,缘板阻尼器的质量将缩小近十倍,这会使惯性力与离心力发生较大的改变。而离心力作为另一个关键参数,将直接影响阻尼器的减振效果。因此在参数分析中,如果改变底角时将阻尼器的质量、受到的离心力仍当作常量,将与实际情况有较大出入,使得结论的准确性有待商榷。

本文从楔形缘板阻尼器设计参数的关联性出发,考虑多个设计参数的联动变化对阻尼效果产生的影响,从而对设计参数进行优化,以更贴近真实情况。第一节建立了简化的双叶片-楔形缘板阻尼器集中参数模型;针对该模型,发展了结合解析雅各比矩阵的多阶谐波平衡法,实现了双叶片-缘板阻尼器系统稳态响应的高效预测。第二节提出了内部关联参数与外部关联参数的概念,建立了楔形缘板阻尼器的关键参数间的联动关系;在此基础上,形成了参数的联动变化对减振效果的影响规律。第三节在考虑了行波激励特点的基础上,分析了非对称缘板阻尼器在带相位差的激振力下对阻尼效果的影响;提出了楔形缘板阻尼器的参数联动设计方案。

1 模型与算法

1.1 双叶片-缘板阻尼器模型

典型的缘板阻尼器安装示意图如图1所示。缘板阻尼器工作时同时与两侧叶片相接触,因此双叶片-缘板阻尼器模型可以描述叶片间存在相

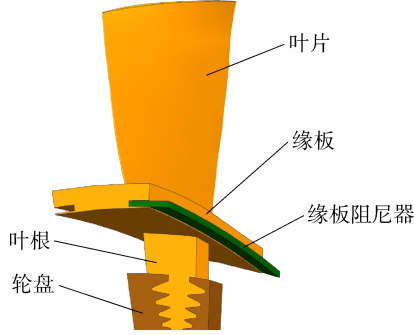


图 1 缘板阻尼器示意图

Fig.1 Diagram of the underplatform damper

位差的运动,可以反映缘板阻尼器的典型工况,且可以考虑滚转效应对阻尼效果的影响。

双叶片-楔形缘板阻尼器集中参数模型如图 2 所示,该模型在文献[13,25]中被采用。缘板阻尼器位于两叶片之间,在离心力的作用下与左右叶根相接触。叶身、叶根与阻尼器的等效质量分别为 m_1 、 m_2 和 m_d ,阻尼器的转动惯量为 I_d 。叶身仅含有 x 方向自由度,等效刚度为 k_1 ;叶根有 x 与 y 两个自由度,等效刚度为 k_x 与 k_y ;缘板阻尼器有三个自由度,包括一个滚转自由度 θ ,其等效约束刚度为 k_{dx} 、 k_{dy} 与 $k_{d\theta}$ 。两侧接触点的切向刚度与法向刚度依次为 k_t 与 k_n 。可以得到系统整体的动力学方程为

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + k_1(x_1 - x_3) &= f_1 \\ m_1 \ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_4) + k_1(x_2 - x_4) &= f_2 \\ m_2 \ddot{x}_3 + c_x \dot{x}_3 + k_x x_3 + c_1(\dot{x}_3 - \dot{x}_1) + \\ &\quad k_t(x_3 - x_1) = -f_{x1} \\ m_2 \ddot{y}_3 + c_y \dot{y}_3 + k_y y_3 + f_{y1} &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_4 + c_x \dot{x}_4 + k_x x_4 + c_1(\dot{x}_4 - \dot{x}_2) + \\ &\quad k_t(x_4 - x_2) = -f_{x2} \\ m_2 \ddot{y}_4 + c_y \dot{y}_4 + k_y y_4 + f_{y2} &= 0 \\ m_d \ddot{x}_d + c_{dx} \dot{x}_d + k_{dx} x_d - f_{x1} - f_{x2} &= 0 \\ m_d \ddot{y}_d + c_{dy} \dot{y}_d + k_{dy} y_d - f_{y1} - f_{y2} &= 0 \\ I_d \ddot{\theta}_d + c_{d\theta} \dot{\theta}_d + k_{d\theta} \theta_d - f_{xr} a_r - f_{xl} a_l + \\ &\quad f_{yr} b_r - f_{yl} b_l = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中 f_1 与 f_2 为分别作用于左、右叶片的激振力, f_{x1} 、 f_{x2} 为左、右两侧接触点的沿 x 方向非线性力, f_{y1} 、 f_{y2} 为左、右两侧受到延 y 方向的非线性力。 $a_l b_l$ 、 $a_r b_r$ 分别为阻尼器质心到左、右两侧接触点在 x 与 y 方向的投影距离,接触点的位置为质心到两边的垂点。楔形阻尼器左、右两侧底角分别为 α_1 和 α_2 。

该模型在接触界面处采用的是单点接触宏观滑移模型,相当于对接面参数进行了均匀化的

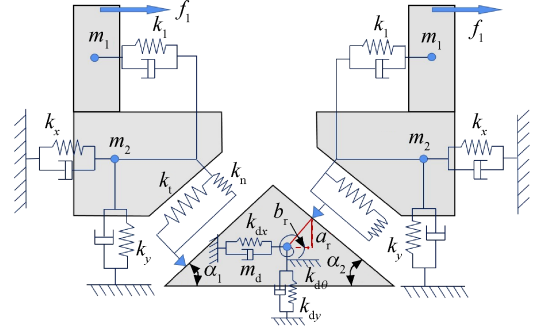


图 2 双叶片-楔形缘板阻尼器模型

Fig.2 Two-blade with a wedge underplatform damper model

简化处理。本文因为进行参数关联的机理性分析,为了提高计算效率,故采用简单的单点接触摩擦模型。实际上缘板阻尼器与叶片的接触状态更为复杂,存在局部滑移-阻滞-分离的现象。部分学者在定量研究其动力学特性时采用了有限元模型结合多接触对摩擦模型来表征界面接触^[8-9]。这样的考虑更加接近真实情况,但计算量相对较大。

1.2 非线性力的求解

对非线性力的描述是求解式(1)的关键。由于楔形阻尼器与叶根是倾斜接触的,因此,以两侧摩擦界面的切向与法向为局部坐标系,则局部坐标系下的切向摩擦力、法向力与在全局坐标系 x 、 y 方向上的非线性力的关系为

$$\begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{t1} \\ f_{n1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} f_{x2} \\ f_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{t2} \\ f_{n2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中 f_{t1} 、 f_{n1} 与 f_{t2} 、 f_{n2} 分别为左侧与右侧接触面的切、法向力。根据二维迟滞库伦摩擦模型(图 3 所示),摩擦点在切向法向均有受力与位移,运动状态可分为分离-阻滞-滑移三种状态。 μ 为接触面摩擦因数。

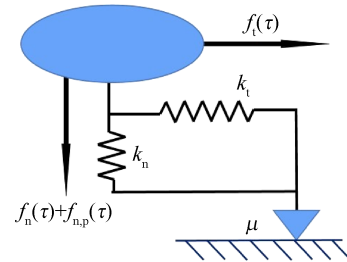


图 3 二维迟滞弹簧模型

Fig.3 Two-dimensional hysteretic spring model

假设任意时刻 τ ,接触点的切向法向位移分别为 $x_r(\tau)$ 和 $y_r(\tau)$, $f_{n,p}$ 为初始法向正压力,则有

$$g_{ap} = -f_{n,p}/k_n \quad (4)$$

当 $g_{ap} \geq 0$ 时表示分离, $g_{ap} \leq 0$ 时表示接触。 $f_n(\tau)$ 与 $f_t(\tau)$ 为 τ 时刻的法向力与切向摩擦力,其满足的关系式为

$$f_n(\tau) = \max[k_n(y_r(\tau) - g_{ap}), 0] \quad (5)$$

在对切向摩擦力进行求解时,需要判断它的摩擦状态,因此要利用前一步的运动状态来进行预测,一般假设 τ 时刻的预测步为阻滞状态

$$f_t^p(\tau) = k_t[x_r(\tau) - x_r(\tau - \Delta\tau)] + f_t(\tau - \Delta\tau) \quad (6)$$

在接触时,当预测步摩擦力 f_t^p 大于最大静摩擦力 μf_n 时,摩擦点处于滑移状态;当 f_t^p 小于最大静摩擦力 μf_n 时,处于阻滞状态。 τ 时刻的切向摩擦力为

$$f_t(\tau) = \begin{cases} f_t^p(\tau) & \text{阻滞} \\ \mu f_n(\tau) \operatorname{sgn}(f_t^p(\tau)) & \text{滑移} \\ 0 & \text{分离} \end{cases} \quad (7)$$

由此可以得到时域上一个周期内的法向力 f_n 与切向摩擦力 f_t 。再基于式(2)、式(3)将局部坐标系下的力转移到全局坐标系下,即可求得式(1)中的沿 x 、 y 方向的非线性力。

1.3 多阶谐波平衡法

由于系统受到周期性激励,因此当系统处于稳态时,各自由度的运动、所受非线性力也具有周期性。可以采用多阶谐波平衡法^[10,23]进行求解。该方法的基本思路是将非线性微分方程组转换为非线性代数方程组,从而直接在频域中计算系统的稳态响应。公式(1)的动力学方程组可以简化写成矩阵的形式

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) + f_{nl}(x, \dot{x}, t) = f_e(t) \quad (8)$$

其中 M 、 C 和 K 分别为结构的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵; f_e 为外部激励力向量; f_{nl} 为干摩擦产生的非线性力向量,受系统位移和速度的影响。将位移、外激励和非线性力表示成傅里叶级数,并保留前 N_h 项谐波阶次,它们的表达式为

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{N_h} X^{(n)} e^{jn\omega t} \right]$$

$$f_e(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{N_h} F_e^{(n)} e^{jn\omega t} \right]$$

$$f_{nl}(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{N_h} F_{nl}^{(n)} e^{jn\omega t} \right] \quad (9)$$

其中 X 为系统各个谐波阶次的位移稳态响应向量, ω 为激励力频率, n 为频域内第 n 阶谐波,带入式(8)中可以得到

$$\sum_{n=0}^{N_h} (H^{(n)} X^{(n)} + F_{nl}^{(n)} - F_e^{(n)}) = 0 \quad (10)$$

其中 $H^{(n)}$ 是第 n 阶谐波的动刚度矩阵

$$H^{(n)} = -(n\omega)^2 M + jn\omega C + K \quad (11)$$

非线性力难以在频域中解析获得,需要采用时频转换法^[10]求解。时域的非线性力需要接触点相对位移来求解,因此先假设系统初始位移 $x(t)$,再根据式(2)~式(7)求解时域上一个周期的非线性力 $f_{nl}(x, \dot{x}, t)$,再通过傅里叶变换转换到频域中,即得到 $F_{nl}(X)$,带入式(10)即可求得系统的稳态响应。但是,此时式(10)求得的解并非最终稳态解,还需要采用逆傅里叶变换再获得系统时域的周期解重新求解非线性力,经多次迭代直到收敛,如图4所示(图中FFT表示快速傅里叶变换过程,IFFT表示快速傅里叶变换过程)。

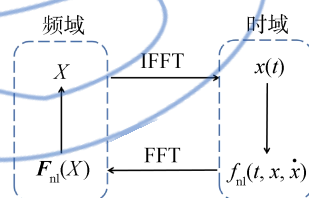


图4 时频转换法流程

Fig.4 Procedure of alternating frequency-time domain

1.4 解析雅可比矩阵的推导

对于非线性代数方程组的牛顿法迭代求解,其中重要的一步就是用雅可比矩阵来判断下一次迭代的值。通常采用有限差分法近似计算雅可比矩阵,一方面由于计算复杂度高,影响计算效率;另一方面由于对雅各比矩阵的计算不精确,会导致算法的收敛性降低^[18]。本文推导了适用于此双叶片-缘板阻尼器模型的解析雅可比矩阵,显著提高了收敛性与计算效率。由式(10)可知第 n 阶谐波的收敛残差表达式为

$$E^{(n)} = H^{(n)} X^{(n)} + F_{nl}^{(n)}(x, \dot{x}, \omega) - F_e^{(n)} \quad (12)$$

则雅可比矩阵的表达式为

$$\left(\frac{\partial E}{\partial X} \right)^{(n)} = H^{(n)} + \frac{\partial F_{nl}^{(n)}(x, \dot{x}, \omega)}{\partial X^{(n)}} \quad (13)$$

式(13)中的关键在于求解非线性力对位移的偏

导。根据链式法则,可以得到

$$\frac{\partial F_{nl}}{\partial X} = \frac{\partial F_{nl}}{\partial F_{nl}^{loc}} \cdot \frac{\partial F_{nl}^{loc}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial X_r} \cdot \frac{\partial X_r}{\partial X_r^{loc}} \cdot \frac{\partial X_r^{loc}}{\partial X} \quad (14)$$

其中 λ 与 X_r 分别为摩擦点的非线性力与相对位移; F_{nl}^{loc} 与 X_r^{loc} 代表局部坐标系下接触点两侧(即叶根与阻尼器)受到的非线性力与位移。通过链式法则,可以将局部坐标系下接触点的非线性力与相对位移拓展至全局坐标系下的非线性力与位移。对于第 n 阶谐波分量,则有相对位移到局部坐标系的拓展

$$\begin{pmatrix} \partial X_r \\ \partial X_r^{loc} \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} \partial F_{nl}^{loc} \\ \partial \lambda \end{pmatrix}_n^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

局部坐标系到全局坐标系的拓展:

$$\begin{pmatrix} \partial X_r^{loc} \\ \partial X \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} \partial F_{nl} \\ \partial F_{nl}^{loc} \end{pmatrix}_n^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & \sqrt{a_{1/r}^2 + b_{1/r}^2} \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

其中 α 为局部坐标系到全局坐标系的夹角。

对于非线性力对相对位移的偏导 $\partial \lambda / \partial X_r$,利用傅里叶变换的线性特性,需要先在时域中求解,再转换到频域中。对于相对位移的第 n 阶谐波分量,非线性力对它的偏导的表达式为

$$\frac{\partial f_t(\tau)}{\partial R(X_r^{(n)})} = \begin{cases} 0 & \text{分离} \\ k_t(\cos(n\tau) - \cos(n(\tau - \Delta\tau))) + \frac{\partial f_t(\tau - \Delta\tau)}{\partial R(X_r^{(n)})} & \text{阻滞} \end{cases}$$

法向力对第 n 阶切向相对位移的偏导始终为0,它们之间不存在关联;法向力对第 n 阶法向相对位移余弦分量的偏导为

$$\frac{\partial f_n(\tau)}{\partial R(X_r^{(n)})} = \begin{cases} 0 & \text{分离} \\ k_n \cos(n \cdot \tau) & \text{接触} \end{cases} \quad (20)$$

切向摩擦力与法向力对相对位移的正弦分量的偏导与式(18)~式(20)一致。在求得时域内一个周期的各个偏导值后,再采用傅里叶变换转换到频域中,获得非线性力在各个谐波阶次的偏导值,带入式(17)即可求得解析雅可比矩阵。

1.5 算法的验证与分析

为了验证算法的精度与计算效率,分别比较了基于时间积分法(Newmark法)、基于有限差分型雅可比矩阵以及基于解析型雅可比矩阵的谐波平衡法的稳态响应曲线。分别给出了离心力为0

$$\frac{\partial \lambda}{\partial X_r^{(n)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_t^{(0)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_t^{(0)}}{\partial X_r^{(sn)}} & \frac{\partial f_n^{(0)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_n^{(0)}}{\partial X_r^{(sn)}} \\ \frac{\partial f_t^{(c1)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_t^{(c1)}}{\partial X_r^{(sn)}} & \frac{\partial f_n^{(c1)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_n^{(c1)}}{\partial X_r^{(sn)}} \\ \frac{\partial f_t^{(s1)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_t^{(s1)}}{\partial X_r^{(sn)}} & \frac{\partial f_n^{(s1)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_n^{(s1)}}{\partial X_r^{(sn)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_t^{(cNh)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_t^{(cNh)}}{\partial X_r^{(sn)}} & \frac{\partial f_n^{(cNh)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_n^{(cNh)}}{\partial X_r^{(sn)}} \\ \frac{\partial f_t^{(sNh)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_t^{(sNh)}}{\partial X_r^{(sn)}} & \frac{\partial f_n^{(sNh)}}{\partial X_r^{(cn)}} & \frac{\partial f_n^{(sNh)}}{\partial X_r^{(sn)}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中非线性力 $\lambda = \{f_t, f_n\}$,即法向力与切向摩擦力,它们对位移的偏导是不同的;上标0代表常量分量,c与s代表各阶谐波的余弦分量与正弦分量。式(17)的纵列代表切向力 f_t 与法向力 f_n 对第 n 阶相对位移谐波分量的偏导的各阶谐波分量(由时频转换法求得)。切向摩擦力对第 n 阶切向相对位移的余弦分量的偏导为

$$\frac{\partial f_t(\tau)}{\partial R(X_r^{(n)})} = \begin{cases} 0 & \text{分离} \\ \frac{\partial f_t(\tau - \Delta\tau)}{\partial R(X_r^{(n)})} & \text{阻滞} \\ \mu k_n \cos(n \cdot \tau) \operatorname{sgn}(f_t^p(\tau)) & \text{滑移} \end{cases} \quad (18)$$

切向摩擦力对第 n 阶法向相对位移的余弦分量的偏导为

$$\frac{\partial f_t(\tau)}{\partial R(X_r^{(n)})} = \begin{cases} 0 & \text{分离/滑移} \\ \frac{\partial f_t(\tau - \Delta\tau)}{\partial R(X_r^{(n)})} & \text{阻滞} \end{cases} \quad (19)$$

N与20 N情况下,叶片的频率-幅值强迫响应特性曲线,如图5所示。

无论是Newmark法还是基于有限差分型雅

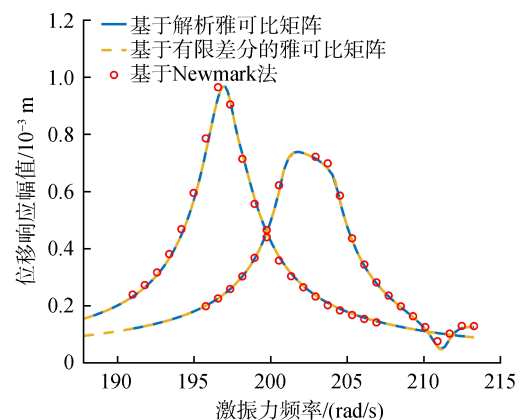


图5 叶片稳态响应特性曲线

Fig.5 Steady state response characteristic curve of blade

可比矩阵的谐波平衡法,采用解析形式的雅可比矩阵都和它们保持了很好的一致性,最大相对误差为 2.57%,说明了计算结果的准确性。而在计算效率方面,比较了有无使用解析型雅可比矩阵对计算效率的影响,结果如表 1 中所示。

表 1 不同雅可比矩阵计算效率对比

Table 1 Comparison of calculation efficiency of different Jacobian matrices

激励频率/Hz	解析型雅可比矩阵		有限差分型雅可比矩阵	
	迭代次数	时间/s	迭代次数	时间/s
195	15	1.342	905	88.51
200	18	1.885	1 204	134.2
210	8	0.729	401	57.48

在迭代次数上,基于解析形式的雅可比矩阵计算每个频率稳态响应的迭代次数不超过 20 次,远低于基于有限差分格式雅可比矩阵所需的迭代次数。这说明解析雅可比矩阵具有更好的收敛性。在收敛时间上,解析型雅可比矩阵比有限差分型雅可比矩阵的计算效率提高了近 70 倍,计算效率显著提升。

本次干摩擦非线性快速响应算法是基于集中参数模型验证的。已有研究表明,针对大型有限元模型,可以结合多重减缩^[9,18]与凝聚^[17]等技术,将进入非线性迭代求解过程的自由度数量降至可接受范围,之后即可采用本算法快速求解减缩后的摩擦非线性动力学方程组。因此该算法针对有限元模型同样可以适用。

2 缘板阻尼器参数联动分析

2.1 参数联动关系的建立

影响缘板阻尼器减振效果的重要因素之一是离心力。先前的研究^[23,25]表明,往往存在一个最优离心力,使得系统能够达到最佳的减振效果。在仅改变离心力而保存其他参数不变的情况下,本次模型得出了相同的结论(图 6)。

离心力的计算公式为

$$P = m_d \Omega^2 R \tag{21}$$

其中 m_d 为缘板阻尼器质量, Ω 为发动机转速, R 为阻尼器安装位置到轴心的半径。可见,离心力将由多个参数共同决定。事实上,仅改变离心力而不改变其他变量是不可能的。想要改变离心力,就必须改变阻尼器质量或转速,而阻尼器的质量

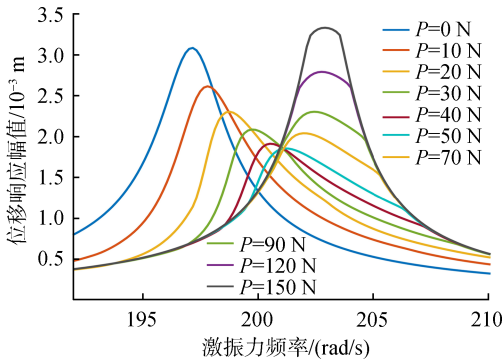


图 6 不同离心力下叶片的稳态响应曲线

Fig.6 Steady state response curves of blades under different centrifugal forces

又与材料密度、几何形状有关,这些参数又同时影响到转动惯量、摩擦点的接触位置等。除了离心力外,几何参数的设计本身对阻尼器性能也有关键影响^[26],因此可以说,这些参数展现出很强的关联性,共同决定缘板阻尼器的性能。

表 2 与表 3 展示了楔形缘板阻尼器的关键设计参数之间的联系。表 2 中的基本设计参数是指彼此间独立、无相互影响关系的参数。将这类影响楔形缘板阻尼器减振效果的基本参数分为三种:几何结构参数、材料参数与外部参数。几何结构参数包括楔形缘板阻尼器两侧底角的大小、底长等;材料参数包括面密度、摩擦因数、切法向刚度等;外部参数与叶盘结构与受力相关,包括阻尼器的安装位置、叶片数量、激振力等。

表 2 楔形缘板阻尼器的基本设计参数

Table 2 The basic design parameters for the wedged underplatform damper

参数类型	参数名称
几何结构参数	延申长度 L
	底长 S
	左侧底角 α_1
	右侧底角 α_2
材料参数	面密度 ρ
	摩擦因数 μ
	切向刚度 k_t
	法向刚度 k_n
外部参数	转速 N
	激振力幅值 F_e
	激振力相位 ϕ
	激振力频率 ω
	安装位置 R_d
	叶片数量 M

表 3 楔形缘板阻尼器的关联设计参数
Table 3 Correlation design parameters for the wedged underplatform damper

参数性质	主要设计参数关联性组成
内部关联参数	两侧边长 $s_{1/2} = \frac{\sin(\alpha_{2/1})}{\sin(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)} S$
	面积 $A = \frac{1}{2} s_1 s_2 \sin(\pi - \alpha_1 - \alpha_2)$
	质量 $m_d = \rho A$
	转动惯量 $I_{d0} = \frac{m_d}{36} (S^2 + s_1^2 + s_2^2)$
	离心力 $P = \rho A \Omega^2 R$
	法向正压力 $F_n = P \cos(\alpha_{1,2})$
外部关联参数	接触点位置 $a_{r,1} = \frac{2A \cos(\alpha_{1,2})}{3s_{1,2}}$
	激振力频率 $\omega = k \frac{2\pi\Omega}{60}$
	激振力相位差 $\phi = \frac{2\pi k}{M}$

表 3 中分析了缘板阻尼器的关联设计参数的组成,并给出了这些参数的具体表达式。可以看出,这些参数并不是独立变化的,而是同时受到表 2 中基本参数的影响,因此彼此直接具有很强的关联性。将关联设计参数分为内部关联参数(仅与缘板阻尼器本身相关)与外部关联参数(仅与尾流激励相关),分别研究它们对楔形缘板阻尼器减振性能的影响。

楔形缘板阻尼器的三维立体示意图如图 7 所示。在几何结构参数中,延伸长度 L 与底长 S 会受到叶盘扇区内空腔大小的限制,往往不能轻易改动。因此将两参数选为定值 $L=0.025\text{ m}$, $S=0.012\text{ m}$ 。此时,楔形缘板阻尼器的形状可以完全由两侧底角 α_1 和 α_2 完全确定。在材料参数中,材料密度 ρ 会对质量、转动惯量乃至离心力产生重要影响,而摩擦因数、切法向刚度等参数则较为独立,并不与其他参数耦合。

因此,选定两侧底角 α_1 和 α_2 以及材料面密度 ρ ,就可以确定阻尼器内部的参数,且这些参数互

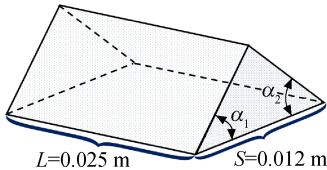


图 7 楔形缘板阻尼器三维示意图

Fig.7 Three-dimensional diagram of wedge-under platform damper

相之间的关系也确定了。将它们在表 2 中归为内部关联参数。此外,对于外部参数而言,激振力频率往往是转速的倍数^[27],即激励阶次 EO(engine order),而这也会对激振力的相位差产生影响。可以发现叶盘转速 Ω 是影响外部参数的关键。将这一部分非缘板阻尼器直接相关但产生影响的归为外部关联参数。

2.2 内部参数关联分析

以两侧底角 α_1 和 α_2 以及材料面密度 ρ 作为基本变量,其余参数会根据这 3 个变量确定,在参数关联的基础上进行强迫响应计算。而面密度等于体密度乘以延伸长度 L ,其取值如表 4 所示。

表 4 常用金属材料面密度范围
Table 4 Areal density range of common metal materials

材料	体密度/(kg/m ³)	面密度/(kg/m ²)
铝合金	2 700	67.5
钛合金	4 500	112.5
不锈钢	7 900	198.5
铜合金	8 900	222.5

根据几种典型材料的面密度,设定材料面密度的变化范围在 50~200 kg/m² 之间。当缘板阻尼器两侧底角均为 30° 时,计算了几种不同材料下的叶片强迫响应曲线,如图 8 所示。可以看出,当楔形缘板阻尼器的几何形状确定以后,选择不同密度的材料会有不同的减振效果,整体上呈现先减小后增大的趋势。可以预见,当几何形状给定,将存在一个最优材料密度,使得减振效果达到最优。

当阻尼器材料选为不锈钢时,选取不同底角大小的楔形结构作用下的强迫响应曲线,计算结

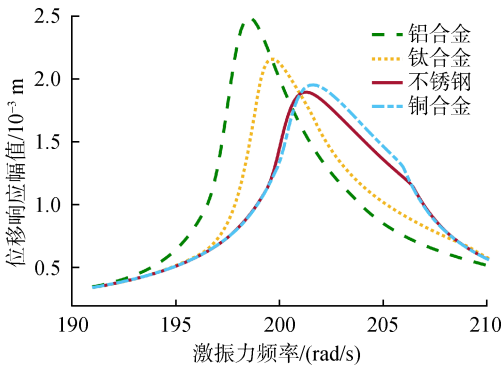


图 8 不同材料密度下的幅频曲线

Fig.8 Amplitude-frequency curve with different material densities

果如图9所示。可以得出,当材料确定时,存在一个最优底角,使得叶片的强迫响应最小。

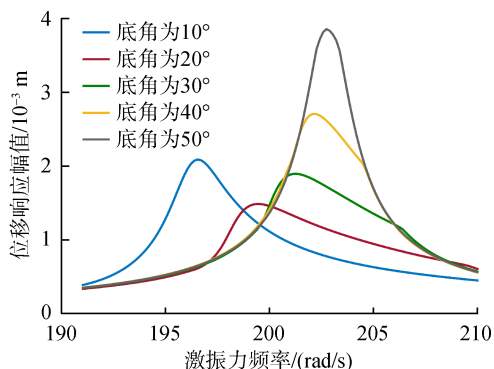


图9 不同底角的幅频曲线

Fig.9 Amplitude-frequency curve with different angles

为了寻找到最优的底角-面密度组合,遍历两者不同的值,并取扫频后强迫响应曲线的最大值,可以得到底角-面密度二维强迫响应幅值图,横坐标为阻尼器面密度,纵坐标为楔形底角的大小,如图10所示。

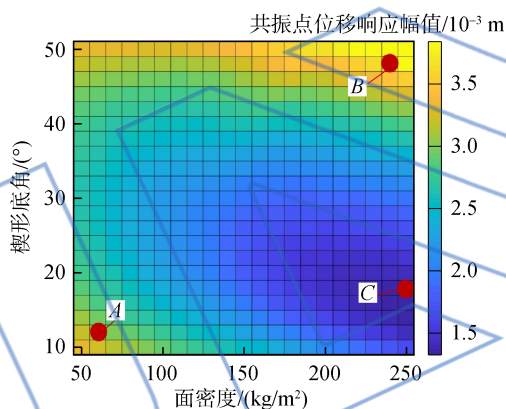


图10 面密度-底角的响应幅值图

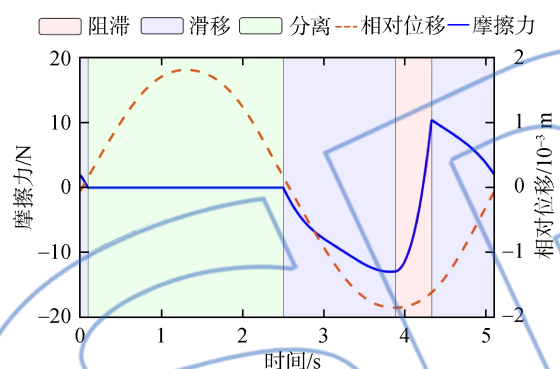
Fig.10 Areal density-angle response amplitude graph

可以发现,每一个面密度都对应着一个最优的底角组合,使得减振效果最好;就全局而言,当底角取值为 16° ,面密度取 250 kg/m^2 时,叶片的强迫响应值最小。在参数联动后,得出与先前研究的结论不同^[19],楔形缘板阻尼器两侧底角并非越小越好,而是存在一个最优值;缘板阻尼器的质量与转动惯量也存在影响,需要选取较大密度的材料,有较好的减振效果。

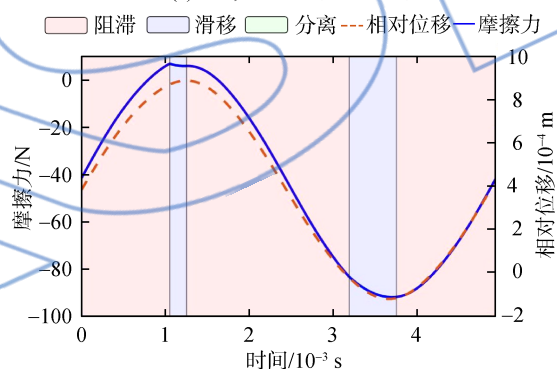
对减振机理做一个简单的探究。在图10中分别选取A、B和C三个特殊响应点,分别代表了小底角角度-低密度(A点)、大底角角度-高密度(B点)以及最优组合点(C点)三种设计类型。它

们在一个周期内的摩擦力、相对位移以及接触状态如图11所示。

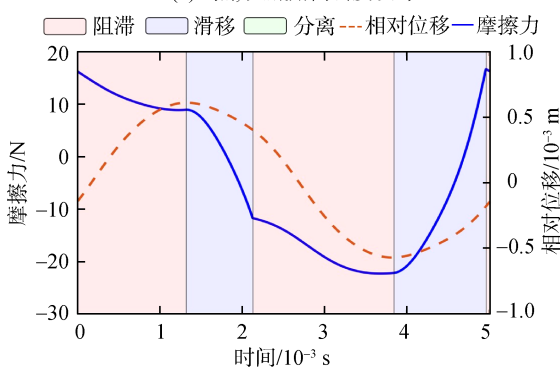
对于A点,由于较小的质量造成较小的离心力,因此在接近一半的时间内接触点都处于分离的状态,使得减振效果降低;而对于B点,离心力较大使得系统在大部分情况下处于阻滞状态,且摩擦作用的相对位移距离较短,耗散能量低,因此减振效果也不好;而C点的滑移段、摩擦力大小都较大,因此有较好的减振效果。



(a) A点, 小底角低密度设计



(b) B点, 大底角高密度设计



(c) C点, 最优组合设计

图11 不同设计下摩擦力与相对位移的时间历程

Fig.11 Time-histories of the tangential force and relative displacement in different design schemes

2.3 外部参数关联分析

文章第2.2节中,扫频时转速 Ω 恒定为4 000

r/min。然而叶盘受到激振力的频率往往是转速的倍数。因此,还应建立起转速与激振力频率的关系,即外部参数的联动。

有无考虑外部参数联动的情况会使离心力在扫频时产生变化,如图 12 所示。在不考虑联动时,转速与激振力频率无关,因此扫频时离心力不会随着激振力频率变化。在参数关联后,离心力随着激振力频率的变大而变大,呈现出一种近似线性的关系。图 13 给出了同时考虑内部与外部参数联动的情况下,叶片随着转速的变化而产生的强迫响应值。可以发现,外部参数的联动与否,对叶片的强迫响应曲线有一定影响但不大,即减振效果对外部参数联动不敏感。

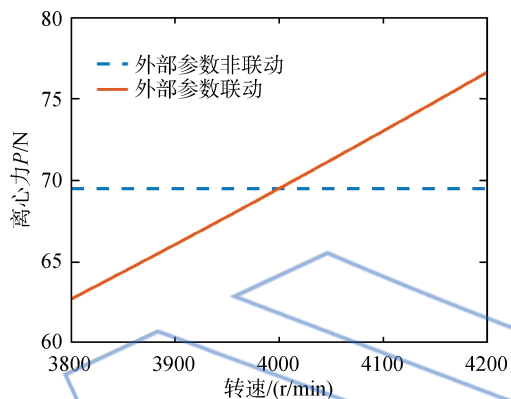


图 12 外部参数关联后离心力的变化
Fig.12 Change of centrifugal force under external parameters correlation

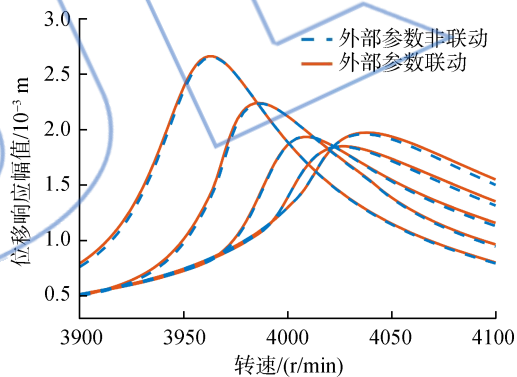


图 13 外部参数关联后稳态响应曲线对比
Fig.13 Steady state response curve comparison under external parameters correlation

2.4 其他独立参数的影响

除了关联参数外,还存在其他参数,它们并不直接与其他参数相关联,但其改变会对减振效果产生影响。

接触面的摩擦因数是重要的材料参数之一,

摩擦因数的改变会影响缘板阻尼器的减振效果。当面密度恒定为 200 kg/m^2 时,计算不同摩擦因数下,随着缘板阻尼器两侧底角变化得到的响应特性曲线,结果如图 14 所示。

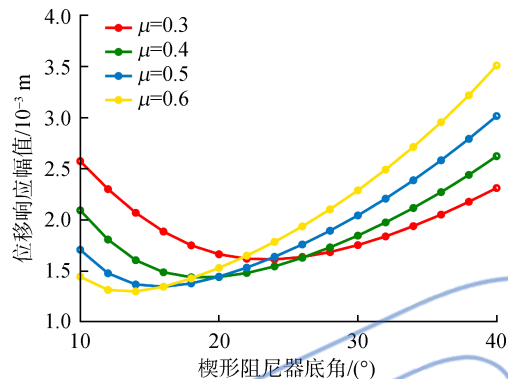


图 14 不同摩擦因数下底角-幅值曲线
Fig.14 Angle-amplitude curve under different frictional coefficients

计算后发现,不同的摩擦因数所对应的最优底角是不一样的。当摩擦因数越小时,对应的最优底角应该越大;相对而言摩擦因数越大减振效果越好,但是其优化程度与其他摩擦因数相比差距并不大。

激振力幅值 F_{ext} 是影响减振效果的另一个相对独立的参数,它的大小取决于上流静子叶片尾流激励的大小。激振力的幅值同样也会改变阻尼器的减振效果。计算不同激振力幅值作用下叶片的强迫响应特性曲线,如图 15 所示。

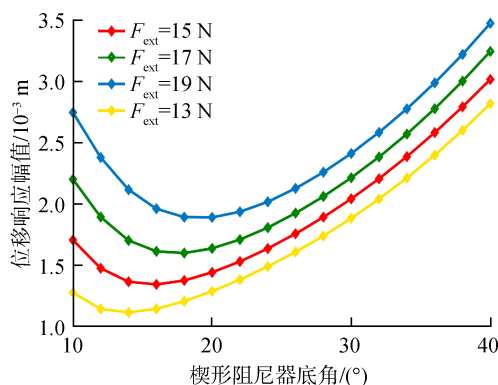


图 15 不同激振力下的底角-幅值曲线
Fig.15 Angle-amplitude curve under different excitation forces

激振力并不是可以人为选择的参数,但可以根据激振力的影响规律对缘板阻尼器的设计进行优化。显然,激振力幅值越大,叶片的响应幅值也越大,而阻尼器需要选择更大的底角,使减振效果

整体达到最佳。

3 非对称楔形缘板阻尼器

缘板阻尼器几何形状的改变会对阻尼效果产生影响,同时也会影响阻尼器的体积大小与离心力,因此有必要在参数联动分析的基础上,对左右侧底角不相等的非对称楔形缘板阻尼器展开参数分析。

3.1 无相位差激振力的作用

当楔形结构两侧底角 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 时,阻尼器非对称。因此当叶片两端施加激振力时,缘板阻尼器与叶根的两个接触面产生的减振效果是不同的,两叶片的振幅也会不同。分别以左右两侧叶片在底角为 30° 的对称缘板阻尼器与底角各为 20° 和 40° 的非对称缘板阻尼器下的强迫响应曲线进行对比(图16)。当底角相等时,两叶片的振幅是近似相等的,而底角不等时,振幅呈现出一高一低的情况。从迟滞回线包围的面积可以看出:叶片对应摩擦点的迟滞回线面积越大,振幅越小,减振效果越好(图17)。

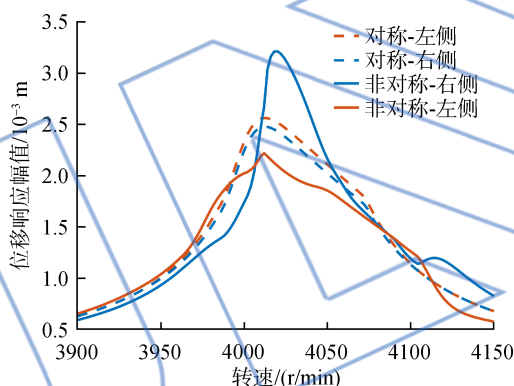


图16 非对称阻尼结构的强迫响应曲线

Fig.16 Steady state response curve under asymmetric damping structure

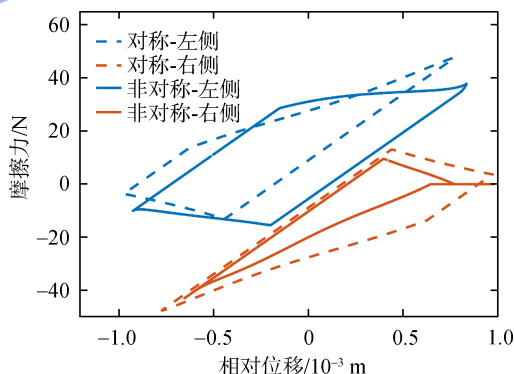


图17 非对称阻尼结构的迟滞回线

Fig.17 Hysteresis loop of asymmetric damping structure

因此,当缘板阻尼器非对称或者激振力存在相位差时,为了更好地比较非对称缘板阻尼器对整个系统的减振效果,采用计算结构阻尼比的方式来衡量减振的好坏程度,计算公式为

$$\xi = \frac{1}{2} \eta = \frac{D}{4\pi E} \quad (22)$$

其中 ξ 是结构阻尼比, η 是结构损耗因子, D 是系统在一个周期内损耗的能量, E 是系统最大变形时的弹性势能。通过这种方式可以比较不同底角的非对称缘板阻尼器的减振效果。图18展示了当面密度选在 200 kg/m^2 , 激振力幅值为 15 N 且无相位差时,不同底角组合下的结构阻尼比。

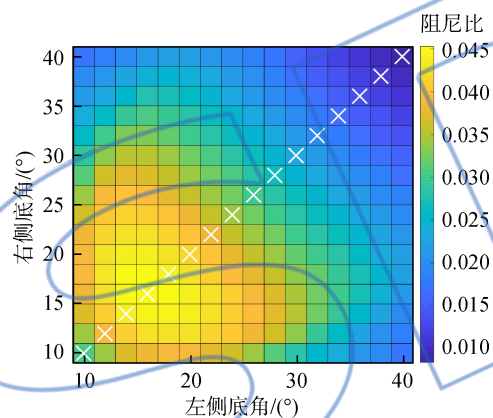


图18 不同底角组合的阻尼比

Fig.18 Damping ratio of different angle combinations

可以发现,阻尼比的大小沿着对角线(即 $\alpha_1 = \alpha_2$)呈对称分布,且最大的阻尼比仍在 $\alpha_1 = \alpha_2 = 16^\circ$ 的位置,这与文章第2.2节的计算结果一致。这说明,当激振力没有相位差时,对称缘板阻尼器有最佳的阻尼效果。

3.2 含有相位差激振力的作用

由于上游静子叶片尾流激励的作用,叶盘各个扇区受到的激振力幅值相等,并常常相差一个相位 ϕ_n 。当叶盘有 M 个叶片,激振力频率是转速频率的 k 倍时,相位差满足

$$\omega = k\Omega \quad (23)$$

$$\varphi_n = \frac{2\pi k}{M} \quad (24)$$

当两个叶片受到不同相位的激振力时,也会对阻尼效果产生不同的影响。本次模型中激振力频率是转速频率的3倍,假设整圈含有36个扇区时,相位差为 30° 。当楔形缘板阻尼器采用对称设计,比较激振力有无相位差对阻尼效果的影响,计算结果如图19所示。

可以得出,无论底角的大小如何选取,对于对称

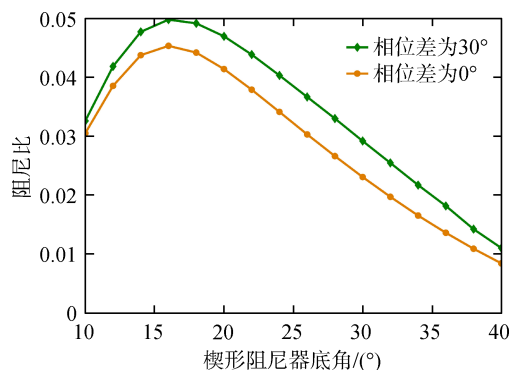


图19 带相位差激振力的底角-阻尼比曲线

Fig.19 Angle-damping ratio curve under excitation force with phase difference

的楔形缘板阻尼器而言,带有相位差的激振力总形成更大的阻尼比。当楔形底角变化时,两种激振力产生的阻尼比有相似的规律,即都是在底角为16°时,阻尼比达到最大值,分别为4.53%与4.97%。

当两叶片的激振力有相位差时,考虑结合非对称缘板阻尼器产生的影响。遍历缘板阻尼器两侧底角的组合,可以得到阻尼比-底角关联图。每个不同的底角组合在激振力存在30°相位差情况下的响应情况,计算结果如图20所示。

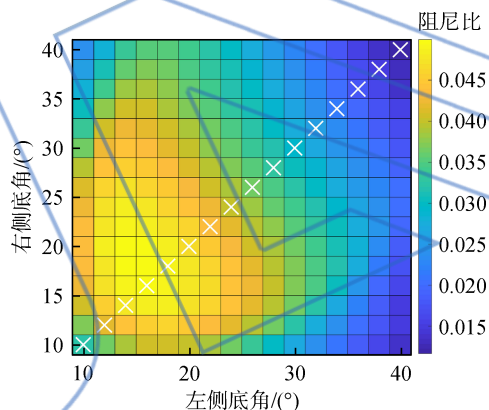


图20 30°激振力相位差下不同底角组合的阻尼比

Fig.20 Damping ratio of different angle combinations under excitation force with 30° phase difference

当激振力有相位时,阻尼比不再按照对角线对称分布,这说明带有相位的激振力会在非对称阻尼器的作用下产生不同的阻尼效果。此时最优的底角组合为 $\alpha_1 = 16^\circ$ 和 $\alpha_2 = 18^\circ$,最优阻尼比为4.99%,高于无相位差激振力的最优阻尼比4.53%,也略高于对称缘板阻尼结构的最优阻尼比。这表明,当激振力存在相位差时,采用非对称缘板阻尼结构可以进一步提高缘板阻尼器的减振效果。

4 结 论

本文通过推导解析形式的雅各比矩阵,改进了适用于计算双叶片-缘板阻尼器模型稳态响应的多阶谐波平衡法,显著提升了收敛性与计算效率(提升近70倍)。建立了缘板阻尼器各参数间的联动关系。在考虑参数关联的基础上,以材料密度、楔形底角和转速作为核心变量,研究了摩擦因数、激振力幅值、相位差等参数对减振效果的变化规律。得出了如下主要结论:

1) 在缘板阻尼器减振效果的参数分析中,考虑参数的关联性是有必要的。缘板阻尼器的优化设计不应当是参数解耦的,而应当充分考虑多个参数的相关性,在参数相互关联的基础上评估缘板阻尼器的减振效果。

2) 在参数关联后进行分析,与文献[19]中结果相比,两侧底角并非越小越好,而是存在一个最优值。当材料面密度为 250 kg/m^2 ,两侧底角取 16° 时,阻尼效果最佳达4.57%。

3) 摩擦因数越小、激振力幅值越大,则需要更大的底角以提升阻尼效果。选取较大摩擦因数的缘板阻尼器能够提升减振效果。

4) 当作用于两个叶片的激振力不存在相位差时,需要采用对称的缘板阻尼器设计;当激振力存在相位差时,一方面相位差的存在会优化阻尼效果,另一方面需要采用非对称的缘板阻尼结构。

由于参数关联考虑了转速的影响,需要在叶盘实际工况下进行实验验证,条件较为苛刻。下一步工作拟通过合理设计实验,来验证参数关联的影响;并采用整圈叶盘-缘板阻尼器模型,在考虑失谐以及盘片耦合的基础上,进一步研究缘板阻尼器参数对减振性能的影响规律。

参考文献:

- [1] 陈璐璐,马艳红,杨鑫.带干摩擦阻尼结构叶片振动响应试验[J].航空动力学报,2008,23(9):1647-1653.
CHEN Lulu, MA Yanhong, YANG Xin. Blade vibration with dry friction damping[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(9):1647-1653. (in Chinese)
- [2] 李琳,刘久周,李超.航空发动机中的干摩擦阻尼器及其设计技术研究进展[J].航空动力学报,2016,31(10):2305-2317.
LI Lin, LIU Jiuzhou, LI Chao. Research progress of dry friction damper and its design technology in aeroengine[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(10):2305-2317. (in Chinese)

- [3] MENQ C H, GRIFFIN J H, BIELAK J. The influence of a variable normal load on forced vibration of a frictional damped system[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1986, 108(2):300-305.
- [4] 何尚文, 任兴民, 秦卫阳, 等. 基于微滑移模型的B-G型叶片干摩擦阻尼器减振特性研究[J]. *振动与冲击*, 2012, 31(1):44-48.
HE Shangwen, REN Xingmin, QIN Weiyang, et al. Study on damping characteristics of B-G dry friction damper based on micro slip model[J]. *Vibration and Shock*, 2012, 31(1):44-48. (in Chinese)
- [5] GRIFFIN J H. Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils[J]. *Journal of Engineering for Power*, 1998, 102(2):329-333.
- [6] SIEWERT C, PANNING L, WALLASCHEK J, et al. Multi-harmonic forced response analysis of a turbine blading coupled by nonlinear contact forces[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2010, 132(8):287-296.
- [7] GOLA M M, GASTALDI C. Understanding complexities in underplatform damper mechanics[R]. ASME Paper GT2014-25240, 2014.
- [8] PETROV E P, EWINS D J. Advanced modeling of underplatform friction dampers for analysis of blades disk vibration[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2007, 129(1):143-150.
- [9] PETROV E P. A high-accuracy model reduction for analysis of nonlinear vibrations in structures with contact interfaces[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2011, 133(10):102503.1-102503.10.
- [10] 李琳, 刘久周, 李超. 干摩擦阻尼器对宽频多阶次激励减振效果分析[J]. *航空动力学报*, 2016, 31(9):2171-2180.
LI Lin, LIU Jiuzhou, LI Chao. Analysis of damping effect of dry friction damper on broadband multi order excitation[J]. *Journal of Aeronautical Dynamics*, 2016, 31(9):2171-2180. (in Chinese)
- [11] YANG B D, MENQ C H. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading: Part 1 stick-slip contact kinematics[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1998, 120(2):410-417.
- [12] PFEIFER F, HAJEK M. Stick-slip motion of turbine blade dampers[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society: Physical and Engineering Sciences*, 1992, 338:503-517.
- [13] FIRRONE C M, ZUCCA S. Modelling friction contacts in structural dynamics and its application to turbine bladed disks[M]. Berlin, Germany: InTech, 2011.
- [14] PANNING L, SEXTRO W, POPP K. Optimization of interblade friction damper design[R]. ASME Paper 2000-GT-0541, 2000.
- [15] GOLA M M, SANTOS M B D, LIU T. Measurement of the scatter of underplatform damper hysteresis cycle: experimental approach[R]. Chicago, USA: ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2012.
- [16] FIRRONE C M, ZUCCA S, GOLA M M. The effect of underplatform dampers on the forced response of bladed disks by a coupled static/dynamic harmonic balance method[J]. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 2011, 46(2):363-375.
- [17] POUDOU O J. Modeling and analysis of the dynamics of dry-friction-damped structural systems[D]. Michigan, USA: The University of Michigan, 2007.
- [18] 马皓晔, 李琳, 范雨, 等. 基于加速动态拉格朗日法的摩擦片阻尼分析[J]. *航空学报*, 2019, 40(12):121-133.
MA Haoye, LI Lin, FAN Yu, et al. Analysis of friction plate damping based on accelerated dynamic Lagrangian method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2019, 40(12):121-133. (in Chinese)
- [19] FIRRONE C M. Measurement of the kinematics of two underplatform dampers with different geometry and comparison with numerical simulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 323(1):323-333.
- [20] 郝燕平, 单颖春, 朱梓根. 缘板摩擦阻尼器的减振实验研究[J]. *航空动力学报*, 2001, 16(1):55-58.
HAO Yanping, SHAN Yingchun, ZHU Zigen. Experimental study on vibration reduction of edge plate friction damper[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2001, 16(1):55-58. (in Chinese)
- [21] ZUCCA S, BOTTO D. Range of variability in dynamics of semi-cylindrical friction dampers for turbine blades[R]. ASME Paper GT2008-51058, 2008.
- [22] ZHANG Dayi, GAO Bin. Experimental investigation on dynamic response of falt blades with underplatform dampers[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2019, 32(12):2667-2678.
- [23] 单颖春, 朱梓根, 刘献栋. 带缘板摩擦阻尼器叶片的非线性振动响应研究[J]. *振动、测试与诊断*, 2006, 26(2):126-132.
SHAN Yingchun, ZHU Zigen, LIU Xiangdong. Study on nonlinear vibration response of blade with friction damper[J]. *Vibration, Test and Diagnosis*, 2006, 26(2):126-132. (in Chinese)
- [24] SANLITURK K Y, EWINS D J. Underplatform dampers for turbine blades: theoretical modeling, analysis, and comparison with experimental data[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2001, 123(4):327-338.
- [25] 阳刚, 周标, 臧朝平, 等. 缘板阻尼结构减振特性的影响因素分析[J]. *航空动力学报*, 2019, 34(1):115-124.
YANG Gang, ZHOU Biao, ZANG Chaoping, et al. Analysis of influence factors on vibration reduction characteristics of edge plate damping structure[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2019, 34(1):115-124. (in Chinese)
- [26] GASTALDI C, GOLA M M. Criteria for best performance of pre-optimized solid dampers[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2019, 141(4):042502.1-042502.9.
- [27] YANG B D, MENQ C H. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading: Part 2 prediction of forced response and experimental verification[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1998, 120(2):418-423.

(编辑:张雪)